Zum Fundamentalsatz der Algebra

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 35, 1983,
S.111-120

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zum Fundamentalsatz der Algebra

Von **Hans-Joachim Kowalsky,** Braunschweig

(Eingereicht am 7.10.1983)

Der Fundamentalsatz der Algebra ist zu einem wesentlichen Teil ein Satz der komplexen Analysis, der im allgemeinen auch mit funktionentheoretischen Mitteln bewiesen wird. Für seine reelle Fassung

Jedes irreduzible Polynom aus $\mathbb{R}[t]$ *besitzt höchstens den Grad Zwei.*

ist jedoch ein rein im Reellen verlaufender und möglichst elementarer Beweis wünschenswert.

Ein diesen Forderungen entgegenkommender Beweis wird im dritten Abschnitt dieser Arbeit angegeben. Außer auf einfachste Grundlagen der reellen Analysis, die auf nur einen Teilbeweis konzentriert sind, stützt er sich auf einige einfache Sätze über spezielle lineare Abbildungen. Diese werden in den beiden ersten Abschnitten allgemein für Vektorräume über beliebigen kommutativen Skalarenkörpern bewiesen. Der Beweis des Fundamentalsatzes erfolgt dann im dritten Abschnitt für den reellen Fall. Er läßt sich jedoch mit wenigen naheliegenden Modifikationen direkt auf den komplexen Fall übertragen.

In den beiden ersten Abschnitten bedeutet X immer einen Vektorraum über einem kommutativen Skalarenkörper K mit $\operatorname{Dim} X = n \geqq 1$. Ferner ist $\Phi: X \to X$ stets eine lineare Abbildung. Unter dem charakteristischen Polynom von Φ wird das normierte Polynom $f_\Phi(t) = \operatorname{Det}(t \cdot \mathrm{id} - \Phi)$ verstanden, und Entsprechendes soll auch für das Minimalpolynom gelten.

1. Irreduzible Abbildungen

Definition: *Ein Unterraum* U *von* X *heißt* Φ-invariant, *wenn* $\Phi U \subset U$ *gilt.*

Die Abbildung Φ *heißt* irreduzibel, *wenn* $\{\mathbf{o}\}$ *und* X *die einzigen* Φ*-invarianten Unterräume sind.*

Die Φ-invarianten Unterräume U sind offenbar dadurch gekennzeichnet, daß man Φ auch als Abbildung von U auffassen kann, daß also die Restriktion Φ_U von Φ auf U ein Endomorphismus $\Phi_U: U \to U$ ist. Eine Charakterisierung der irreduziblen Endomorphismen enthält der folgende Satz.

Satz 1.1 *Die Abbildung* Φ *ist genau dann irreduzibel, wenn ihr charakteristisches Polynom* f_Φ *in* $K[t]$ *irreduzibel ist.*

Umgekehrt ist jedes normierte irreduzible Polynom $f \in K[t]$ *auch charakteristisches Polynom einer irreduziblen Abbildung.*

Beweis: Erstens sei Φ irreduzibel, und es werde angenommen, daß für das charakteristische Polynom $f_\Phi = g \cdot h$ mit echten Teilern g und h gilt. Kern $g(\Phi)$ und Kern $h(\Phi)$ sind Φ-invariante Unterräume, also gleich $\{\mathbf{o}\}$ oder gleich X. Aus Kern $g(\Phi)$ = Kern $h(\Phi) = \{\mathbf{o}\}$ würde die Regularität von $g(\Phi)$ und $h(\Phi)$, also auch von $f_\Phi(\Phi) = g(\Phi) \cdot h(\Phi)$ folgen. Im Widerspruch dazu ist $f_\Phi(\Phi)$ aber die Nullabbildung, die wegen $n \geqq 1$ nicht regulär ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher weiter Kern $g(\Phi) = X$ vorausgesetzt werden. Ist dann $\mathbf{a}$ ein von $\mathbf{o}$ verschiedener Vektor, so ist der von $\{\Phi^k \mathbf{a}: k \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Unterraum U vom Nullraum verschieden und Φ-invariant. Andererseits können unter den Vektoren $\mathbf{a}, \Phi\mathbf{a}, \Phi^2\mathbf{a}, \ldots$ höchstens so viele linear unabhängig sein, wie der Grad von g angibt. Es folgt Dim U $\leqq$ Grad g $<$ Grad $f_\Phi = n$, also $U \neq X$ im Widerspruch zur Irreduzibilität von Φ.

Zweitens sei jetzt f_Φ irreduzibel, und U sei ein vom Nullraum verschiedener Φ-invarianter Unterraum. Es sei dann g das Minimalpolynom der Restriktion Φ_U von Φ auf U. Dann gilt jedenfalls Dim U $\geqq$ Grad g. Weiter ist aber g auch ein Teiler von f_Φ, stimmt also wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität mit f_Φ überein. Es folgt Dim U $\geqq$ Grad g = Grad f_Φ = n, also U = X.

Schließlich ist ein beliebiges normiertes Polynom $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ aus K[t] charakteristisches Polynom der Matrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und damit der durch sie beschriebenen linearen Abbildung. Daher folgt die letzte Behauptung unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen. ∎

Der soeben hergeleitete Satz zeigt, daß sich der Fundamentalsatz der Algebra auch im Rahmen der linearen Algebra formulieren läßt: Er besagt dann, daß es im $\mathbb{R}^n$ für $n \geqq 3$ und im $\mathbb{C}^n$ für $n \geqq 2$ keine irreduziblen linearen Abbildungen gibt.

Satz 1.2 *Die Abbildung* Φ *sei irreduzibel. Dann gilt:*

1. Φ *ist regulär.*
2. *Das charakteristische Polynom* f_Φ *ist gleichzeitig Minimalpolynom von* Φ.
3. *Für jeden Vektor* $\mathbf{a} \in X$ *mit* $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ *ist* $B_\mathbf{a} = \{\mathbf{a}, \Phi\mathbf{a}, \ldots, \Phi^{n-1}\mathbf{a}\}$ *eine Basis von* X.

Beweis: 1. Wegen $n \geqq 1$ ist die Nullabbildung nicht irreduzibel. Daher gilt Kern $\Phi \neq X$. Da Kern Φ auch Φ-invariant ist, folgt Kern $\Phi = \{\mathbf{o}\}$, also die Regularität von Φ.

2. Das Minimalpolynom ist Teiler von f_Φ, und nach Satz 1.1 ist f_Φ irreduzibel.

3. Der von B_a erzeugte Unterraum U ist Φ-invariant und wegen $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ vom Nullraum verschieden. Es folgt $U = X$ und damit die Behauptung. ∎

2. Q-Abbildungen

In diesem Abschnitt wird kurz auf solche linearen Abbildungen $\Phi: X \to X$ eingegangen, die mindestens eine nicht entartete Hyperfläche zweiter Ordnung, eine Quadrik, auf sich abbilden. Gleichwertig mit dieser Bedingung ist die Vertauschbarkeit der Abbildung mit einer geeigneten Bilinearform, die dann auch als symmetrische Bilinearform (oder im Fall $K = \mathbb{C}$ als Hermite'sche Form) gewählt werden kann.

Definition: *Eine lineare Abbildung* $\Phi: X \to X$ *heißt* Q-Abbildung, *wenn es zu ihr eine nicht entartete Bilinearform* $F: X \times X \to K$ *mit*

(1) $\quad F(\Phi\mathbf{x}, \Phi\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$

gibt. Es wird dann F *eine* Φ-Bilinearform *genannt.*

Satz 2.1 *Jede Q-Abbildung ist regulär.*

Beweis: Es sei Φ eine Q-Abbildung, und F sei eine Φ-Bilinearform. Aus $\mathbf{x} \in \text{Kern}\,\Phi$ folgt dann

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\Phi\mathbf{x}, \Phi\mathbf{y}) = F(\mathbf{o}, \mathbf{y}) = 0$$

für alle $\mathbf{y} \in X$. Da F nicht entartet ist, muß $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ gelten. ∎

Satz 2.2 *Es sei Φ eine Q-Abbildung. Ferner sei*

$$g_\Phi(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

das Minimalpolynom von Φ, und

$$f_\Phi(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$$

sei das charakteristische Polynom. Dann folgt:

1. $\text{Det}\,\Phi = \pm 1$.

2. g_Φ *ist auch das Minimalpolynom von* Φ^{-1}. *Es gilt* $a_0 = \pm 1$ *und allgemein*
$$a_{k-\varkappa} = a_0 a_\varkappa \quad \text{für } \varkappa = 1, \ldots, k-1.$$

3. f_Φ *ist auch das charakteristische Polynom von* Φ^{-1}, *und es gilt entsprechend*
$$c_{n-\nu} = (-1)^n \text{Det}\,\Phi \cdot c_\nu \quad \text{für } \nu = 0, \ldots, n.$$

Beweis: Es sei F eine Φ-Bilinearform. Hinsichtlich einer Basis von X wird Φ durch eine reguläre Matrix A (Satz 2.1) beschrieben, und F ist als nicht entarteter Bilinearform eine ebenfalls reguläre Matrix S zugeordnet. Die Invarianzbedingung (1) ist dann gleichwertig mit

(2) $\quad A\,S\,A^T = S \quad \text{oder} \quad A\,S = S\,A^{T-1}$.

Es folgt

$$\operatorname{Det}(tS\text{-}AS) = \operatorname{Det}(tS\text{-}SA^{T\text{-}1})$$

und nach Multiplikation mit Det S^{-1}

$$f_\Phi(t) = \operatorname{Det}(tE\text{-}A) = \operatorname{Det}(tE\text{-}A^{T\text{-}1}) = \operatorname{Det}(tE\text{-}A^{-1}) = f_{\Phi^{-1}}(t).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} f_{\Phi^{-1}}(t) &= \operatorname{Det}(tE\text{-}A^{-1}) = t^n \operatorname{Det} A^{-1} \cdot \operatorname{Det}(A\text{-}\tfrac{1}{t}E) \\ &= (-1)^n \frac{t^n}{\operatorname{Det} A} \operatorname{Det}(\tfrac{1}{t}E\text{-}A) = \frac{(-1)^n}{\operatorname{Det} A} t^n f_\Phi(\tfrac{1}{t}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\operatorname{Det} A}(c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_{n-1} t + 1). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert Det $\Phi = \pm 1$ und daher weiter auch den zweiten Teil der dritten Behauptung.

Aus (2) folgt durch Induktion $A^k S = SA^{T\text{-}k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher weiter

$$g_\Phi(A) \cdot S = S \cdot g_\Phi(A^{T\text{-}1}).$$

Da in dieser Gleichung links die Nullmatrix steht, gilt dasselbe für die rechte Seite. Wegen der Regularität von S folgt

$$g_\Phi(A^{T\text{-}1}) = 0, \quad \text{also auch} \quad g_\Phi(A^{-1}) = 0,$$

und daher ist $g_{\Phi^{-1}}$ ein Teiler von g_Φ. Da aber Φ und Φ^{-1} gleichberechtigt eingehen, ergibt sich sogar $g_{\Phi^{-1}} = g_\Phi$. Der zweite Teil der zweiten Behauptung ergibt sich nun wieder durch einen analogen Koeffizientenvergleich. ∎

Bei irreduziblen Abbildungen stimmen nach Satz 1.2 das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom überein, so daß dann in dem letzten Satz auch die zweite und dritte Behauptung zusammenfallen. Zumindest in diesem Fall erweisen sie sich dann auch als hinreichend für eine Q-Abbildung. Der entsprechende Satz wird zwar weiterhin nicht gebraucht, aber auf einen Teil seines Beweises kann dann später zurückgegriffen werden.

Satz 2.3 *Die Abbildung Φ sei irreduzibel, und das charakteristische Polynom*

$$f_\Phi(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0$$

sei auch charakteristisches Polynom von Φ^{-1}. Dann ist Φ eine Q-Abbildung.

Beweis: Da der Fall $n=1$ trivial ist, kann beim Beweis $n \geqq 2$ vorausgesetzt werden. Es sei dann $\mathbf{a}$ ein fester von $\mathbf{o}$ verschiedener Vektor. Nach Satz 1.2 ist $B_\mathbf{a}$ eine Basis von X. Konstruiert werden muß eine Φ-Bilinearform F, die hier sogar als symmetrische Bilinearform bestimmt werden soll. Ihr entspricht hinsichtlich der Basis $B_\mathbf{a}$ umkehrbar eindeutig eine symmetrische Matrix $S = (s_{\mu,\nu})$, deren Elemente im Hinblick auf die Vektoren der Basis B_a, nämlich $\mathbf{a}, \Phi\mathbf{a}, \dots, \Phi^{n-1}\mathbf{a}$, durch $\mu,\nu=0,\dots.n-1$ indiziert werden sollen. Es gilt dann

$$s_{\mu,\nu} = F(\Phi^\mu \mathbf{a}, \Phi^\nu \mathbf{a}) = F(\Phi^\nu \mathbf{a}, \Phi^\mu \mathbf{a}) = s_{\nu,\mu} \quad (\mu,\nu=1,\dots,n\text{-}1).$$

Die Invarianzbedingung (1) ist gleichwertig mit den Bedingungen

$$(3) \qquad F(\Phi^{\mu+1}\mathbf{a}, \Phi^{\nu+1}\mathbf{a}) = F(\Phi^\mu \mathbf{a}, \Phi^\nu \mathbf{a}) \quad \text{für } \mu,\nu=0,\dots,n\text{-}1.$$

Aus den Fällen $\mu,\nu \leqq n\text{-}2$ ergibt sich für die Elemente der gesuchten Matrix S als gleichbedeutende Forderung

$$(4) \qquad s_{\mu,\mu+\nu} = s_{0,\nu} \quad \text{für } \nu=0,\dots,n\text{-}1 \text{ und } \mu=0,\dots,n\text{-}1\text{-}\nu,$$

wenn man außerdem die geforderte Symmetrie von S berücksichtigt. Zur Festlegung von S und damit von F sind daher nur noch die Matrixelemente $s_{0,0},\dots,s_{0,n-1}$ zu bestimmen.

Wegen

$$\Phi^n \mathbf{a} = -c_0\mathbf{a} - c_1(\Phi\mathbf{a}) - \dots - c_{n-1}(\Phi^{n-1}\mathbf{a})$$

ergeben die Bedingungen (3) für $\mu=0,\dots,n\text{-}2$ und $\nu=n\text{-}1$

$$\begin{aligned} 0 &= F(\Phi^\mu \mathbf{a}, \Phi^{n-1}\mathbf{a}) - F(\Phi^{\mu+1}\mathbf{a}, \Phi^n \mathbf{a}) \\ &= s_{\mu,n-1} + \sum_{\lambda=0}^{n-1} F(\Phi^{\mu+1}\mathbf{a}, c_\lambda(\Phi^\lambda \mathbf{a})) \\ &= s_{\mu,n-1} + \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda s_{\mu+1,\lambda}. \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung von (4) erhält man hieraus zur Bestimmung von $s_{0,0},\dots,s_{0,n-1}$ das folgende homogene lineare Gleichungssystem, das allerdings noch durch die dem Fall $\mu=\nu=n\text{-}1$ entsprechende Gleichung ergänzt werden muß.

$$(5) \qquad \begin{array}{llllll|l} s_{0,0} & s_{0,1} & s_{0,2} & \dots & s_{0,n-2} & s_{0,n-1} & \\ \hline c_1 & c_0+c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & 1 & 0 \\ c_2 & c_1+c_3 & c_0+c_4 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-2} & c_{n-3}+c_{n-1} & 1+c_{n-4} & \dots & c_0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 1+c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_1 & c_0 & 0 \end{array}$$

Bisher wurde die Voraussetzung $f_{\Phi^{-1}} = f_\Phi$ noch nicht benutzt. Sie besagt ja

$$(6) \qquad c_{n-\nu} = (-1)^n \operatorname{Det} \Phi \cdot c_\nu \quad \text{für } \nu=0,\dots,n$$

mit $\operatorname{Det} \Phi = \pm 1$ und insbesondere $c_0 = \pm 1$. Im Fall $n=2$ lautet das vollständige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \; s_{0,0} + (1+c_0) \; s_{0,1} &= 0, \\ (c_0^2+c_1^2-1)s_{0,0} + 2c_0c_1 \quad s_{0,1} &= 0. \end{aligned}$$

Subtraktion der mit c_1 multiplizierten ersten Gleichung von der zweiten ergibt

$$(c_0^2-1)\, s_{0,0} + c_1(c_0-1)\, s_{0,1} = 0.$$

Der erste Koeffizient verschwindet wegen $c_0 = \pm 1$. Aber auch der zweite Koeffizient hat den Wert Null, da im Fall $c_0 = -1$ aus (6) auch $c_1 = 0$ folgt. Das Gleichungssystem hat also den Rang Eins und ist nicht-trivial lösbar.

Im Fall $n > 2$ kann die Abhängigkeit der letzten Gleichung zwar analog gezeigt werden. Man sieht aber unmittelbar, daß sich bereits die Gleichungen aus (5) wegen der Koeffizientenbedingungen (6) im wesentlichen auf die Hälfte reduzieren, so daß in jedem Fall eine nicht-triviale Lösung S und damit eine symmetrische und mit Φ vertauschbare Bilinearform F existiert, von der nur noch gezeigt werden muß, daß sie nicht entartet, daß also S regulär ist.

Nimmt man das Gegenteil an, so ist $U = \text{Kern } S$ ein vom Nullraum, wegen $S \neq 0$ aber auch von X verschiedener Unterraum. Aus $\mathbf{x} \in U$ folgt $F(\Phi\mathbf{x}, \Phi\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{y} \in X$, wegen der Regularität von Φ (Satz 1.2) aber auch $F(\Phi\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ für alle $\mathbf{z} = \Phi\mathbf{y} \in X$ und somit $\Phi\mathbf{x} \in U$. Daher ist U auch Φ-invariant, was der Irreduzibilität von Φ widerspricht. ∎

Die in dem Beweis gegebenen Hinweise zeigen, daß das homogene lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Matrix S tatsächlich höchstens den Rang $[\frac{n}{2}]$ besitzt. Eine irreduzible Abbildung Φ mit $f_{\Phi^{-1}} = f_\Phi$ besitzt daher eine mindestens $(n-[\frac{n}{2}])$-parametrige Schar invarianter Quadriken.

3. Der Fundamentalsatz der Algebra

In diesem Abschnitt sei

(7) $\qquad P(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 \quad (c_n \neq 0)$

immer ein irreduzibles Polynom aus $\mathbb{R}[t]$ oder $\mathbb{C}[t]$. Zu beweisen ist $n \leqq 2$. Denn daß im komplexen Fall dann sogar $n \leqq 1$ erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Existenz entsprechender Quadratwurzeln.

Der nachfolgende Beweis des Fundamentalsatzes wird allerdings für den reellen Fall formuliert, um deutlich zu machen, daß er auch tatsächlich rein im Reellen verläuft. Abgesehen von einigen naheliegenden Änderungen, kann er aber direkt für den komplexen Fall übernommen werden.

Zum Beweis des Fundamentalsatzes wird $n > 2$ angenommen. Außerdem kann n als gerade Zahl vorausgesetzt werden, da reelle Polynome ungeraden Grades eine reelle Nullstelle besitzen. Da mit P auch $\frac{1}{c_n}P$ irreduzibel ist, darf in (7) zusätzlich $c_n = 1$ angenommen werden. Weiter ist mit P für jedes $x \in \mathbb{R}$ auch das Polynom

$$P_x(t) = P(t+x) = t^n + \frac{P^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\, t^{n-1} + \ldots + \frac{P'(x)}{1!}\, t + P(x)$$

irreduzibel. Wegen $\lim_{t\to\infty} P_x(t) = +\infty$ muß $P(x) > 0$ gelten, da P_x andernfalls eine reelle Nullstelle besitzen würde. Daher ist schließlich auch

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad P_x^*(t) &= \frac{1}{P(x)} P_x(\sqrt[n]{P(x)}\, t) \\
&= t^n + c_{n-1}(x)t^{n-1} + \ldots + c_1(x)t + 1 \\
&\text{mit } c_\nu(x) = \frac{P^{(\nu)}(x)}{\nu! \sqrt[n]{P(x)}^{n-\nu}} \quad (\nu = 1, \ldots, n\text{-}1)
\end{aligned}
$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein irreduzibles Polynom aus $\mathbb{R}[t]$. Ihm wird (wie schon im Beweis von 1.1) die reelle Matrix

$$
A_x = \begin{pmatrix}
0 & 1 & & & \\
 & 0 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 0 & 1 \\
-1 & -c_1(x) & -c_2(x) & \ldots & -c_{n-1}(x)
\end{pmatrix}
$$

zugeordnet, die ihrerseits hinsichtlich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\Phi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschreibt. Für sie gilt Det $\Phi_x = 1$, und P_x^* ist gerade ihr charakteristisches Polynom. Gezeigt wird

Satz 3.1 *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* Φ_x *eine Q-Abbildung.*

Der Beweis dieses Satzes wird am Schluß nachgeholt. Im Gegensatz zu den bisher rein algebraischen Schlüssen enthält er an wesentlichen Stellen die Anteile der Analysis.

Aus Satz 3.1 folgt nun in Verbindung mit Satz 2.2, daß die Koeffizienten der Polynome P_x^* die Bedingungen (n ist gerade)

$$c_{n-\nu}(x) = c_\nu(x) \quad (\nu = 1, \ldots, n\text{-}1)$$

erfüllen müssen; und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$. Speziell für $\nu = 1$ ergibt dies (vgl. (8))

$$\frac{P^{(n-1)}(x)}{(n-1)!\sqrt[n]{P(x)}} = \frac{P'(x)}{1!\sqrt[n]{P(x)}^{n-1}}$$

oder gleichwertig

$$(P^{(n-1)})^n \cdot P^{n-2} = ((n-1)!)^n \cdot P'^n.$$

Wegen $n > 2$ ist P Teiler der linken, also auch der rechten Seite. Da P aber als irreduzibles Polynom Primelement von $\mathbb{R}[t]$ ist, folgt der Widerspruch, daß P ein Teiler von P' sein müßte.

Damit ist der Fundamentalsatz bewiesen, und es bedarf nur noch des Beweises von Satz 3.1.

B e w e i s v o n 3.1: Da P_x^* das charakteristische Polynom von Φ_x und irreduzibel ist, folgt nach Satz 1.1, daß Φ_x eine irreduzible Abbildung ist, und wegen Satz 1.2 ist P_x^* auch das Minimalpolynom von Φ_x. Zur Vereinfachung der Schreibweise soll weiterhin statt Φ_x wieder nur Φ, statt P_x^* nur P^* und statt $c_\nu(x)$ nur c_ν geschrieben werden.

Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt

(9) $$\Phi^n \mathbf{a} = -\mathbf{a} - c_1(\Phi \mathbf{a}) - \ldots - c_{n-1}(\Phi^{n-1}\mathbf{a})$$

und daher weiter

$$\begin{aligned} |\mathrm{Det}\,(\Phi\mathbf{a},\ldots,\Phi^n\mathbf{a})| &= |\mathrm{Det}\,(\Phi\mathbf{a},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{a},-\mathbf{a})| \\ &= |\mathrm{Det}\,(\mathbf{a},\Phi\mathbf{a},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{a})|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion folgt hieraus

(10) $$|\mathrm{Det}\,(\Phi^k\mathbf{a},\ldots,\Phi^{k+n-1}\mathbf{a})| = |\mathrm{Det}\,(\mathbf{a},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{a})|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Weiter sei jetzt $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, wegen der Regularität von Φ also auch $\Phi^k\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen wird, daß die Folge $(|\Phi^k\mathbf{a}|)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Sie enthält dann eine gegen Unendlich konvergierende Teilfolge, und aus dieser kann wegen der Kompaktheit der Einheitskugel eine weitere Teilfolge so ausgesondert werden, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\Phi^{k_\nu}\mathbf{a}}{|\Phi^{k_\nu}\mathbf{a}|} = \mathbf{b} \neq \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu\to\infty} |\Phi^{k_\nu}\mathbf{a}| = \infty$$

gilt. Mit Hilfe von (10) folgt hieraus

$$\begin{aligned} |\mathrm{Det}\,(\mathbf{b},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{b})| &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{|\Phi^{k_\nu}\mathbf{a}|^n} |\mathrm{Det}\,(\Phi^{k_\nu}\mathbf{a},\ldots,\Phi^{k_\nu+n-1}\mathbf{a})| \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{|\Phi^{k_\nu}\mathbf{a}|^n}) \,|\mathrm{Det}\,(\mathbf{a},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{a})| = 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, daß die Vektoren $\mathbf{b},\ldots,\Phi^{n-1}\mathbf{b}$ nach Satz 1.2 linear unabhängig sind. Entgegen der Annahme gibt es also ein $m(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$ mit $|\Phi^k\mathbf{a}| \leqq m(\mathbf{a})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Anwendung dieses Ergebnisses auf die Vektoren $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ der kanonischen Basis ergibt für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$

$$\begin{aligned} |\Phi^k\mathbf{x}| &\leqq |x_1|\,|\Phi^k\mathbf{e}_1| + \ldots + |x_n|\,|\Phi^k\mathbf{e}_n|\; (|\Phi^k\mathbf{e}_n|) \\ &\leqq |\mathbf{x}|m(\mathbf{e}_1) + \ldots + |\mathbf{x}|m(\mathbf{e}_n) \\ &\leqq m'|\mathbf{x}| \\ \text{mit}\quad & m' = m(\mathbf{e}_1) + \ldots + m(\mathbf{e}_n) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nun ist mit Φ auch Φ^{-1} eine irreduzible Abbildung mit dem charakteristischen Polynom $f_{\Phi^{-1}}(t) = t^n P^*(\frac{1}{t}) = t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_{n-1}t + 1$. Dieselben Schlüsse mit Φ^{-1} statt Φ liefern daher $|\Phi^{-k}\mathbf{x}| \leqq m''|\mathbf{x}|$ mit einem geeigneten $m'' \in \mathbb{R}$. Setzt man noch $m = \max\{m', m''\}$, so folgt

(11) $$\frac{1}{m}|\mathbf{x}| \leqq |\Phi^k\mathbf{x}| \leqq m|\mathbf{x}| \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Um nach dieser Vorbereitung zu zeigen, daß Φ eine Q-Abbildung ist, kann man auf den Beweis von Satz 2.3 zurückgreifen. Wie dort sollen die Elemente einer symmetrischen Matrix S als Lösungen des Gleichungssystems (5) bestimmt werden, das hier nicht durch eine weitere Gleichung ergänzt wird. Da es dann höchstens den Rang n-1 besitzt, gibt es jedenfalls eine Lösung $S \neq 0$. Diese Matrix bestimmt nun eine symmetrische Bilinearform F, die die Bedingungen

$$F(\Phi^{\mu+1}\mathbf{a}, \Phi^{\nu+1}\mathbf{a}) = F(\Phi^{\mu}\mathbf{a}, \Phi^{\nu}\mathbf{a}) \quad (\mu,\nu = 0,\ldots,n-1)$$

zunächst mit Ausnahme des Falls $\mu = \nu = n-1$ alle erfüllt. Zu beweisen ist nur noch, daß auch die ausstehende Bedingung automatisch gilt. Denn die außerdem noch nachzuweisende Eigenschaft „nicht entartet“ folgt wieder wie im Beweis von Satz 2.3 aus der Irreduzibilität von Φ.

Zu widerlegen ist also nur noch die

(12) *Annahme:* $F(\Phi^n\mathbf{a}, \Phi^n\mathbf{a}) - F(\Phi^{n-1}\mathbf{a}, \Phi^{n-1}\mathbf{a}) \neq 0.$

Dazu sei $\mathbf{x}$ ein von $\mathbf{o}$ verschiedener Vektor, dessen Bildvektoren folgende Basisdarstellungen besitzen mögen:

$$\Phi^k\mathbf{x} = x_{k,0}\mathbf{a} + x_{k,1}(\Phi\mathbf{a}) + \ldots + x_{k,n-1}(\Phi^{n-1}\mathbf{a}) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Man erhält dann

$$F(\Phi\mathbf{x}, \Phi\mathbf{x}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} x_{0,\mu} \cdot x_{0,\nu} \cdot F(\Phi^{\mu+1}\mathbf{a}, \Phi^{\nu+1}\mathbf{a})$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} x_{0,\mu} \cdot x_{0,\nu} \cdot F(\Phi^{\mu}\mathbf{a}, \Phi^{\nu}\mathbf{a}) + x_{0,n-1}^2 \,[F(\Phi^n\mathbf{a}, \Phi^n\mathbf{a}) - F(\Phi^{n-1}\mathbf{a}, \Phi^{n-1}\mathbf{a})]$$

$$= F(\mathbf{x},\mathbf{x}) + x_{0,n-1}^2 \,[F(\Phi^n\mathbf{a}, \Phi^n\mathbf{a}) - F(\Phi^{n-1}\mathbf{a}, \Phi^{n-1}\mathbf{a})]$$

und durch Induktion

(13) $$F(\Phi^k\mathbf{x}, \Phi^k\mathbf{x}) = F(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \Big(\sum_{\varkappa=0}^{k-1} x_{\varkappa,n-1}^2\Big) \,[F(\Phi^n\mathbf{a}, \Phi^n\mathbf{a}) - F(\Phi^{n-1}\mathbf{a}, \Phi^{n-1}\mathbf{a})].$$

Wegen (11) ist die Folge $(\Phi^k\mathbf{x})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und daher auch die Folge $(F(\Phi^k\mathbf{x}, \Phi^k\mathbf{x}))_{k\in\mathbb{N}}$. Da aber in (13) die eckige Klammer nach Annahme nicht verschwindet, muß die Reihe $\sum x_{\varkappa,n-1}^2$ beschränkt und damit konvergent sein. Es folgt

(14) $$\lim_{\varkappa\to\infty} x_{\varkappa,n-1} = 0.$$

Wieder wegen (1) gilt mit einer geeigneten Teilfolge

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi^{k_\nu}\mathbf{x} = \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$$

und daher

(15) $$\Phi^s\mathbf{y} = \lim_{\nu\to\infty} \Phi^{k_\nu+s}\mathbf{x} \quad (s \in \mathbb{N}).$$

Der von $\{\Phi^s\mathbf{y} : s \in \mathbb{N}\}$ aufgespannte Unterraum U ist Φ-invariant und vom Nullraum verschieden. Wegen (14) und (15) ist U aber auch in dem von den Basisvektoren $\mathbf{a}, \Phi\mathbf{a}, \ldots, \Phi^{n-2}\mathbf{a}$ erzeugten Unterraum enthalten, so daß Dim $U \leqq n-1$, also $U \neq R^n$ gilt. Das ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität von Φ. ∎